

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园

首页

新随笔

联系

订阅

管理

<

2022年3月

>

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力

欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的

园龄：4年7个月

粉丝：288

关注：5

+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔

我的评论

我的参与

最新评论

我的标签

积分与排名

积分 - 457097

排名 - 1198

线性代数笔记7——再看行列式与矩阵

前面的文章已经对行列式和矩阵做了简单介绍，在经过向量与平面方程的铺垫后，让我们以新的视角去审视行列式与矩阵。

行列式

如果有两个向量 $\langle a_1, a_2 \rangle$ 和 $\langle b_1, b_2 \rangle$ ，那么这两个向量组成的行列式是：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

看起来只是表示一个简单的计算，仅仅计算了一个数值，但是别忘了，行列式是由向量组成的，它一定会表示向量间的某种关系。

在《线性代数笔记4——向量3（叉积）》中我们看到，二阶行列式表示在二维平面中以两个向量为临边的平行四边形的面积；三阶行列式表示在三维空间中以三个向量为临边的平行六面体的体积；推广到n维空间，n阶行列式表示在n维空间中图形的n维体积。实际上我们无法有效表示出三维以上的空间。对于物理世界中更多维的空间，绝大多数人都无法想象，但是数学却可以给出明确的定义。

对于n维空间的行列式，可以表示为：

$$D_n = |A_{n \times n}|$$

其中A是一个 $n \times n$ 的矩阵。

行列式是由向量引出的，解释的也是向量的性质，在看到行列式时一定要在头脑中映射出向量，实际上线性代数的本质就是对向量的研究。

行列式的性质

性质1，如果 $D_n = |A|$ 中某行的元素全为0，那么 $D_n = 0$

这个性质较为明显，在多维空间中，行列式表示的是体积，如果其中一个维度的模为0，那么体积也是0。*(几何解释非常棒)*

性质2，如果 $D_n = |A|$ 中某两行元素对应成比例，那么 $D_n = 0$

很多时候我们都喜欢用实例推导性质，像下边这样：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 2 = 0$$

或者用代数形式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ ka_1 & ka_2 \end{vmatrix} = a_2 ka_1 - a_1 ka_2 = 0$$

随笔分类 (211)

★★资源下载★★(1)
Java并发编程(1)
程序员的数学(24)
单变量微积分(31)
多变量微积分(24)
概率(24)
机器学习(27)
软件设计(1)
数据分析(6)
数据结构与算法(27)
随笔(5)
线性代数(34)
项目管理(2)
转载(4)

随笔档案 (205)

2021年2月(1)
2020年3月(2)
2020年2月(6)
2020年1月(4)
2019年12月(7)
2019年11月(15)
2019年9月(3)
2019年8月(6)
2019年7月(1)
2019年6月(8)
2019年5月(3)
2019年4月(5)
2019年3月(7)
2019年2月(3)
2019年1月(7)
更多

阅读排行榜

1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

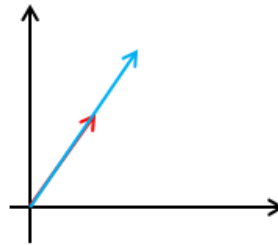
推荐排行榜

1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

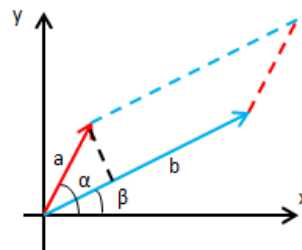
1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0, 即夹角小于90°, 这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人

但是性质应当由定义推导, 然后用计算去验证, 而不是用计算去推导。现在我们尝试用行列式的定义去推导。行列式表示的是向量间的关系, 以二维空间为例, 如果某两行元素对应成比例, 那么说明一个向量是另一个向量的延伸, 它们的夹角是0°或180°, 即二者平行, 两个平行的向量围成的面积是0:



性质3, 如果 $D_n = |A|$ 中某两行元素互换, 那么互换后的行列式变号, 即 $|A| = -|A|$

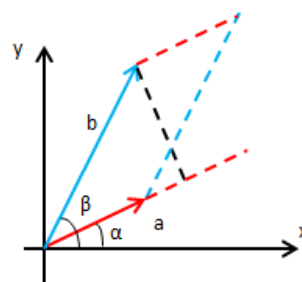
两个向量的模长是 a 和 b , 与 x 轴的夹角分别是 α 和 β , 如下图所示:



平行四边形的面积:

$$S = basin(\alpha - \beta)$$

如果两个向量互换:



$$\begin{aligned} \sin(x) \\ = -\sin(-x) \end{aligned}$$

$$S' = absin(\beta - \alpha) = basin(\alpha - \beta) = -S$$

在代数学中, 角度、面积、体积可以是负的。用计算去验证:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = -(b_1 a_2 - b_2 a_1) = -\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{vmatrix} = k^2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

性质4, 倍乘性质

$$k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ kc & kd \end{vmatrix}$$

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At) 有些图片挂了呢

--ccchendada

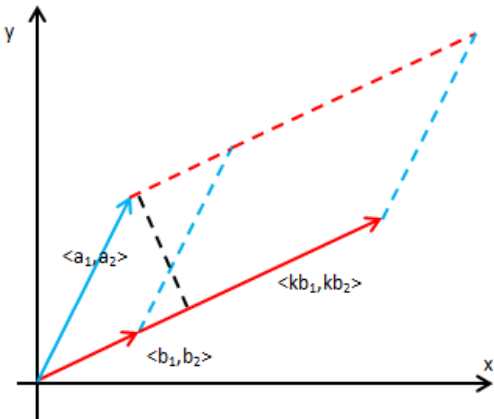
5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中 $v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

$$D_n = |A| = \begin{vmatrix} \cdots & & & \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \cdots & a_{i_n} \\ \cdots & & & \end{vmatrix} \text{ then } k \begin{vmatrix} \cdots & & & \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \cdots & a_{i_n} \\ \cdots & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & & & \\ ka_{i_1} & ka_{i_2} & \cdots & ka_{i_n} \\ \cdots & & & \end{vmatrix}$$

实际上是将外部的k乘到其中的一行，把平行四边形的一条边扩大k倍，则面积也扩大了k倍，如下图所示：



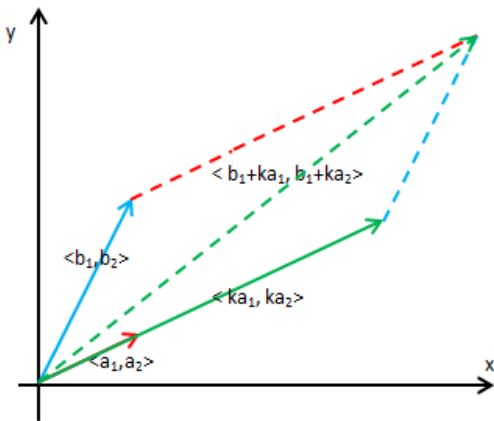
需要注意的是行列式与矩阵的区别，矩阵扩大k倍是将矩阵中的全部元素都乘以k（矩阵中的每个元素都对应了一个向量的分量，这在下文关于矩阵的介绍中会有所说明），这将有下面的关系：

$$|kA_{n \times n}| = k^n |A_{n \times n}|$$

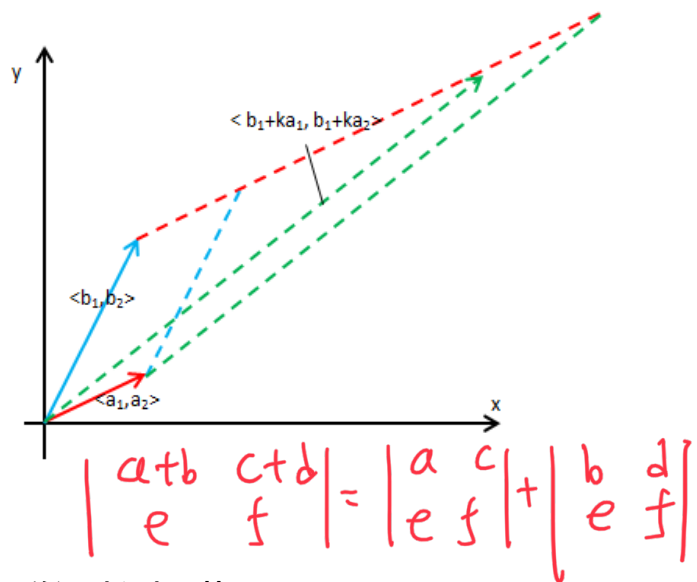
性质5，倍加性质

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 + ka_1 & b_2 + ka_2 \end{vmatrix}$$

对于更高阶的行列式也一样。下图平行四边形的斜边展示了一个向量加上另一个向量的k倍：



两个平行四边形的面积是相同的，所以倍加公式成立。



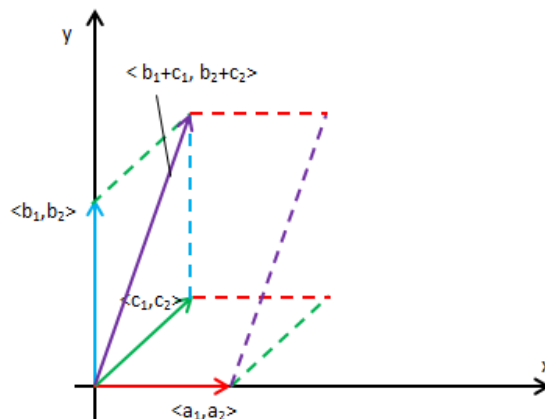
性质6, 单行可拆 (加) 性

$$\begin{vmatrix} * & & & * \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \cdots & a_{i_n} \\ * & & & * \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} * & & & * \\ b_{i_1} & b_{i_2} & \cdots & b_{i_n} \\ * & & & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & & & * \\ a_{i_1} + b_{i_1} & a_{i_2} + b_{i_2} & \cdots & a_{i_n} + b_{i_n} \\ * & & & * \end{vmatrix}$$

其中*号表元素完全相同, 从左到右叫加, 从右到左叫拆。以二阶行列式为例:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 + b_1 & c_2 + b_2 \end{vmatrix}$$

为了简单, 将<b₁, b₂>和<a₁, a₂>分别设置在两个坐标轴上, 如下图所示:



<a₁, a₂> <b₁, b₂>所围平行四边形面积是a₂ b₂, <a₁, a₂> <c₁, c₂>所围平行四边形面积是a₂ c₂, <a₁, a₂> <b₁+c₁, b₂+c₂>所围平行四边形面积是a₂(b₂+c₂), 由此可见性质6成立。

性质7, 以上所有作用于行的性质也可以作用于列上, 即|A| = |A^T|

行列式的意义

行列式是由向量组成的, 当D_n = |A| ≠ 0 时, 意味着组成|A|的向量全部独立。所谓独立, 就是向量围成的n维空间中图形的n维体积不为0。这似

乎没有太大价值，但是如果把行列式转换为方程组就意义重大了，以二阶行列式为例：

$$\begin{array}{l} \text{唯一解:} \\ \text{无解, 无穷解} \end{array} \quad \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \end{array}$$

可以看到，对于全部独立的向量，方程组有唯一解，否则方程组无解或有无数解。当 $|A| \neq 0$ 时，说明至少有一个向量是“多余”的，正是这个多余的向量使得 n 维体积为0。以阶行列式为例，当体积为0时，说明三个向量在同一平面内，这意味着，一定可以通过倍乘和倍加性质用另外两个向量表示第三个向量，从而完全消除第三个向量。N元一次方程组需要N个完全不同的等式，现在少了一个等式，所以无法得到唯一解。

线性代数研究的是向量之间的关系，向量间最重要的关系就是独立或不独立，行列式是否等于0正是这种关系的有效描述。

行列式的计算

这里只介绍三阶行列式的计算，更多阶还是交给计算机吧。

$$\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$\begin{matrix} 1+2 & 1+2=3 & 1+3=4 \\ + & - & + \end{matrix}$

矩阵

矩阵在前几章已经有过介绍，这里需要强调的是，矩阵是由向量组成的。

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

从列上看，A由n个m维列向量组成：

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

从行上看，A由m个n维行向量组成：

$$\mathbf{V}' = [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}]$$

矩阵的秩

如果一个矩阵 $A_{m \times n}$ 存在k阶子式不为0，且任意k+1阶子式全为0，称这个矩阵的秩是k， $r(A)=k$ 。

子式是行列式，如果A是一个3×4矩阵，它的一个2阶子式和一个3阶子式是：

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 3 & 2 \\ 10 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 9 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{2 \text{ 阶子式}} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 3 & 2 \\ 10 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 9 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{3 \text{ 阶子式}} \begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 10 & 2 & 3 \\ 4 & 9 & 5 \end{vmatrix}$$

这有什么用呢？

在行列式的意义中我们提到：向量间最重要的关系就是独立或不独立，行列式是否等于0正是这种关系的有效描述。由此看来，矩阵的秩 $r(A) = k$ 表示矩阵中一定存在一个 k 阶行列式，这个行列式中的向量全部独立；且矩阵中对于任意 $k+1$ 阶子式，都存在至少一个多余的向量。简言之，秩意味着矩阵中有且仅有 k 个独立向量。

行阶梯形矩阵

行阶梯矩阵是非零矩阵，它满足这样的性质：1) 如果有0行，则0行种最下方；2) 从行上看，从左边起，出现连续0的个数自上而下严格递增，如下所示：

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

若行阶梯矩阵还满足：1) 台角位置元素为1；2) 台角正上方元素全为0，则称该矩阵为行最简阶梯矩阵，如下所示：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

台角

这有什么用呢？还是联系向量来看问题，在行阶梯矩阵中，阶梯数就是矩阵中独立向量的个数，也就是矩阵的秩；如果矩阵的秩是 k ，该矩阵一定能通过“初等变换”转化为阶梯矩阵，进而转化为行最简阶梯矩阵。

矩阵的初等变换

在经过变换后，矩阵表示的“数表”改变了，但是如果将矩阵看方程组，那么方程组的本质没有变，可以将初等变换看成方程组的消元过程。

变换1，互换变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{row1 与 row2 对换}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

变换2，倍率变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{row1} \times 2} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

变换3, 倍加变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{row2} += \text{row1} \times (-2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

可逆矩阵与行最简阶梯矩阵

先给出结论, 可逆矩阵一定能够通过若干次变换, 转换成同阶单位矩阵, 如下所示:

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

示例

将下列两个矩阵化为行最简阶梯矩阵:

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 4 & 9 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad A_{4 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1) $A_{3 \times 3}$

首先计算矩阵的秩, A 的最高阶子式是3阶。根据矩阵的性质: **某行的元素全为0, 那么 $D_n = 0$; $|A| = |A^T|$, 所以 $D_3 = 0$ 。**

现在取一个二阶子式:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} \neq 0$$

所以矩阵的秩 $r(A) = 2$, 这说明矩阵有2个独立向量, 或者说矩阵中的第三个向量是多余的, 因此矩阵可变换为:

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 4 & 9 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 4 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

再来看 D_2 , 因为 $D_2 \neq 0$, 所以 D_2 组成的矩阵可逆, 也就是:

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由此看来可逆的矩阵一定没有多余向量。既然方程组有唯一解, 那么矩阵必然能够最终变换为右侧单位矩阵的形式, 由此, A 的行最简阶梯矩阵是:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2) $A_{4 \times 3}$

4×3 矩阵, 必然有矩阵的秩 $r(A) \leq 3$, 说明行向量中一定有至少一个是多余的。由于行向量之间没有明显的倍数关系, 所以我们将最右一行视为多余向量:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

经过倍加变换：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{row2} += \text{row1} \times 2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 10 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

此时可以看出， $\langle 0, 9, 10 \rangle$ 和 $\langle 0, -1, 1 \rangle$ 围成的平行四边形面积不为0， $\langle 1, 2, 3 \rangle$ 是空间向量，与前两者不在同一维度，所以：

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 10 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

D_3 对应的矩阵有逆矩阵，并且可变换为同阶单位矩阵，所以：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

作者：我是8位的

出处：<http://www.cnblogs.com/bigmonkey>

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注公众号“我是8位的”



随笔

分类：线性代数

标签：行列式的意义, 行列式的性质, 行阶梯形矩阵

好文要顶

关注我

收藏该文



我是8位的
关注 - 5
粉丝 - 288

0

推荐

0

反对

[+加关注](#)

« 上一篇: [多变量微积分笔记21——空间向量场中的通量](#)

» 下一篇: [多变量微积分笔记22——空间曲面的通量](#)

posted on 2018-05-30 17:32 [我是8位的](#) 阅读(3446) 评论(0) [编辑](#) [收藏](#) [举报](#)

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

 登录后才能查看或发表评论, 立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) [博客园首页](#)

【推荐】[华为 HWD 2022 故事征集](#), 分享最打动你的科技女性故事

【推荐】[华为开发者专区](#), 与开发者一起构建万物互联的智能世界

cloud.e-iceblue.cn

JAVA Office

文档在线编辑

APIs

打开 >

编辑推荐:

- 革命性创新，动画杀手锏 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]: 内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

活动时间: 2022年3月8日-3月18日



最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档: 他缺乏工程师才能, 不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光: 年薪18万美元, 够养家, 不够买海景房
 - 两张照片就能转视频! Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推“杀手级”功能, 可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人: 本金63万, 月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:

[博客园](#)

Copyright © 2022 [我是8位的](#)

Powered by .NET 6 on Kubernetes